Ultraelemek számjegyei

Pécsi Berci

2021

Kivonat

A véges és végtelen játékaként minden végtelen halmazban megjelennek úgynevezett ultraelemek, melyek ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkezhetnek, mint az eredeti elemek. A természetes számok halmazában megjelenők elkalauzolnak a mindenféle számrendszerekben balra végtelen számok birodalmába.

Tartalomjegyzék

0. Bevezető

Egy kis logikai teremtésművelet után, annak hatására egyszerűen majd eltekintünk attól, hogy, teszem azt, az $1+10+100+1000+10\,000+100\,000+\ldots$ végtelen összeg végtelen nagy, és helyette elfogadhatóvá tesszük az alábbi érvelést a konklúziójával együtt.

Ahhoz, hogy a keresett végtelen összeget meghatározzuk, mindössze el kell neveznünk (mondjuk, legyen x) és meg kell szoroznunk az őt definiáló egyenletet tízzel, és kivonni ezt a kettőt egymásból:

$$
\begin{array}{rcl}
x & = & 1 + 10 + 100 + 1000 + 10\,000 + 100\,000 + \ldots \\
10\,x & = & \phantom{1 + {}} 10 + 100 + 1000 + 10\,000 + 100\,000 + \ldots \\
\hline
-9\,x & = & 1 \\
x & = & \boxed{-1/9}
\end{array}
$$

Szóval, egyre több egyre nagyobb pozitív számot összeadunk, és végül *mínusz egykilencedhez* jutunk határértékben?
Izé, ..., érdekes...

A tíz helyett bármelyik pozitív egész szám hatványaival eljátszhatjuk ugyanezt, például

$$
\begin{array}{rcl}
x & = & 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \ldots \\
2\,x & = & \phantom{1 + {}} 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \ldots \\
\hline
-x & = & 1 \\
x & = & \boxed{-1}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
x & = & 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2\,187 + \ldots \\
3\,x & = & \phantom{1 + {}} 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2\,187 + \ldots \\
\hline
-2\,x & = & 1 \\
x & = & \boxed{-1/2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
x & = & 1 + 5 + 25 + 125 + 625 + 3\,125 + 15\,625 + \ldots \\
5\,x & = & \phantom{1 + {}} 5 + 25 + 125 + 625 + 3\,125 + 15\,625 + \ldots \\
\hline
-4\,x & = & 1 \\
x & = & \boxed{-1/4}
\end{array}
$$

1. Jelölések, alapfogalmak

$a \in H$: az a-val jelölt objektum a H halmaznak eleme. Természetesen más betűkkel vagy akár számmal jelölt objetumok és halmazok is szóba jöhetnek.
$a \notin H$: az a-val jelölt objektum *nem eleme* a H-val jelölt halmaznak.

$\{a, b, c, d, \dots\}$: bizonyos, konkrétan felsorolt, $a, b, c, d, \dots$-vel jelölt elemeknek a halmaza.

$\{x : \text{valami feltétel } x\text{-re}\}$: azon (ideiglenesen x-ként hivatkozott) elemek halmaza, amelyekre az írt feltétel teljesül.

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: a *természetes számok* halmaza, a $:=$ jelet *legyen egyenlő*-nek olvassuk.

$A \cup B \cup C$: az A, B és C halmazok *uniója*; egy objektum pontosan akkor eleme az uniónak, ha legalább az egyik uniózandó halmaznak eleme. Természetesen három helyett kettő vagy akárhány halmaz unióját is vehetjük.

$A \cap B$: az A és B halmazok *metszete*; közös elemeiknek a halmaza.

$f(a)$: az a objektumnak az f hozzárendelésnél vett képe. Ha például d a számokon értelmezett mindenkit megduplázó függvény, akkor $d(21) = 42$.

véges sok: 0 vagy 1 vagy 2 vagy 3 vagy 4 vagy 5 vagy... darab, valamely természetes számmal jellemezhető mennyiség.

végtelen sok: olyan sok, hogy egyik természetes szám sem jellemzi ezt a mennyiséget; ha elkezdjük megcímkézni a természetes számokkal (0,1,2,3, 4,5,...) azokat, akikről szó van, akkor mindegyikőjükre jut külön szám (sőt, akár címkézetlenek is maradhatnak). Például maguk a természetes számok végtelen sokan vannak. Akár csak a sík vagy a számegyenes – vagy akár csak egy rövidke szakasz – pontjai.

M^n: hatványozás: az M szám önmagával vett n-szeres szorzata, például $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = (\text{három darab hetes szorzata}) = 49 \cdot 7 = 343$.

M alapú számrendszer: ebben a számokat a $0, 1, \dots, (M-1)$ számjegyekkel írjuk fel úgy, hogy az $1\underbrace{00\cdots000}_{n \text{ db } 0}{}_{(M)}$ az M^n számot jelöli.

Alsó indexben zárójelben jelezzük a számrendszer alapszámát, például:

$$1024_{(7)} \;=\; \mathbf{1} \cdot 7^3 + \mathbf{0} \cdot 7^2 + \mathbf{2} \cdot 7^1 + \mathbf{4} \;=\; 343 + 14 + 4 \;=\; 361$$

$$361 \;=\; 361_{(10)} \;=\; \mathbf{3} \cdot 100 + \mathbf{6} \cdot 10 + \mathbf{1}\,.$$

Tíznél nem sokkal nagyobb számrendszerek esetén szokás a betűket is számjeggyé fokozni, az `A` betű a tízes számjegyet, a `B` betű a tizenegyeset, a `C` a tizenketteset jelöli, és így tovább, például

$$\texttt{DAG1}_{(18)} \;=\; \mathbf{13} \cdot 18^3 + \mathbf{10} \cdot 18^2 + \mathbf{16} \cdot 18 + \mathbf{1} \;=\; 79\,345\,.$$

2. Ultraelemek

Egy halmazt teljes mértékig meghatároznak az elemei.
Hasonlóan, egy tetszőleges objektum jellemezhető azoknak a halmazoknak az összességével, amelyeknek eleme.

Legyen a egy tetszőleges, adott objektumunk a világban, és tekintsük azt a kétértékű hozzárendelést, amely minden H halmazhoz `igaz`-at vagy `hamis`-at rendel aszerint, hogy $a \in H$ vagy $a \notin H$. Jelöljük ezt a függvényt az '$a\in$' összetett szimbólummal, azaz

$$a{\in}(H) = \texttt{igaz} \text{ ha } a \in H \qquad a{\in}(H) = \texttt{hamis} \text{ ha } a \notin H\,.$$

Gondoljuk meg, hogy ez a függvény teljesíti az alábbi definíció (1)-(3) pontjait.

Definíció. Egy olyan u hozzárendelést, ami minden halmazhoz `igaz`-at vagy `hamis`-at rendel, *ultraelemnek* nevezünk, amennyiben teljesíti az alábbiakat:
(1) Van olyan H halmaz, amire $u(H) = \texttt{igaz}$.
(2) Bármely A, B halmazokra $u(A \cup B)$ pontosan akkor `igaz`, ha $u(A)$ és $u(B)$ közül legalább az egyik `igaz`.
(3) Ha az A és B halmazoknak nincs közös elemük, és $u(A) = \texttt{igaz}$, akkor $u(B) = \texttt{hamis}$.
(4) Nincs olyan a objektum, amire $u(H) = a{\in}(H)$ teljesül egyszerre minden H halmaz esetén.

Amennyiben $u(A) = \texttt{igaz}$, azt mondjuk, hogy az u ultraelem *benne van* az A halmazban, avagy A *tartalmazza* u-t, vagy egyszerűen: u *ultraeleme* A-nak.

Ezzel a szóhasználattal a fenti követelmények annyit tesznek, hogy minden u ultraelem
(1) benne van valamely halmazban,
(2) ha u benne van egy A halmazban, akkor minden bővebb halmazban is benne van, viszont, ha u nincs benne se az A se a B halmazban, akkor az uniójukban, $A \cup B$-ben sincs benne;
(3) ha egy H halmazt, aminek u ultraeleme, kettéválasztunk bármilyen szempont alapján, akkor u benne lesz az egyik részben, és a másikban nem lesz benne;
(4) u nem valódi elem.

A (2) követelmény maga után vonja, hogy az kettő helyett három, négy, öt vagy akárhány *véges sok* halmaz uniójára is érvényes:
Tegyük fel, hogy u ultraeleme $A \cup B \cup C$-nek. Azt akarjuk belátni, hogy ekkor u ultraeleme A-nak, B-nek vagy C-nek. Az uniózást lépésekben is végre lehet hajtani (tetszőlegesen zárójelezhető), azaz $A \cup B \cup C$ írható két halmaz uniójaként: $A \cup (B \cup C)$, ekkor alkalmazhatjuk a (2) feltételt, miszerint u benne lesz A-ban vagy $B \cup C$-ben. Ez előbbi esetben kész vagyunk: $u(A) = \texttt{igaz}$, ez utóbbi esetben pedig megint alkalmazhatjuk a (2) feltételt a $B \cup C$ unióra, úgyhogy $u(B)$ vagy $u(C)$ egyike `igaz`.

Ugyanígy lehet eljárni négy, öt, vagy akárhány véges sok halmaz uniója esetén.

Tétel. Véges sok elemmel rendelkező halmaz nem tartalmazhat ultraelemet. Átfogalmazva, ha u ultraelem, és $u(A) = \texttt{igaz}$, akkor az A halmaznak végtelen sok eleme van.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy u ultraeleme egy véges $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ halmaznak, azaz $u(A) = \texttt{igaz}$.
A (2) tulajdonság, mint láttuk, többszöri alkalmazással kiterjed kettőről akárhány de véges sok halmaz uniójára, így mivel

$$A = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \cdots \cup \{a_n\},$$

u benne lesz legalább az egyik egyelemű $\{a_i\}$ halmazban, azaz $u(\{a_i\}) = \texttt{igaz}$. De akkor (2) alapján minden a_i-t tartalmazó halmazban is benne van, és (3) miatt az a_i-t nem tartalmazó halmazokban nincs benne.
Ez azonban ellentmond (4)-nek, mert ezek a tulajdonságok épp az $a_i\in$ függvényt jellemzik, ugyanis azt kaptuk, hogy $u(H) = a_i\in(H)$ minden H halmazra. □

Itt megjegyezzük, hogy az igazi elemek a (2) tulajdonságot nem csak véges uniókra teljesítik, hanem akármekkora végtelen uniókra is: ha adott akármennyire végtelen sok A_i halmaz, akkor is egy a elem pontosan akkor lesz az uniójuknak az eleme, ha legalább az egyik A_i-nak eleme.
Ha a (2) feltételt akármilyen sok halmaz uniójával fogalmaztuk volna meg, akkor a fenti gondolatmenettel – ti. hogy az alaphalmazt felbontjuk az egyelemű részhalmazainak uniójára – igazolható lenne, hogy a definíciónak nem tenne eleget semmi.

Ez itt tehát csak a véges és a végtelen egyik játéka.

Tétel. Minden végtelen sok elemmel rendelkező halmaznak van ultraeleme, méghozzá végtelen sok.

Ezt itt nem bizonyítjuk, mert picit messzire vezetne, és hagyományos értelemben véve nem konstruktív az eljárás. Olyannyira nem, hogy bizonyítottan nem is tudunk konkrét példát mutatni akár egyetlen vacak kis ultraelemre sem, maximum körbe tudjuk őket járni valamennyire, az 'örökölt tulajdonságaik' alapján.

Ha van egy állításunk, ami valamely H alaphalmaz elemeire értelmezhető, akkor azt az állítást a H ultraelemeire is kiterjeszthetjük: Konkrétan, vegyük az állításnak eleget tevő H-beli elemek halmazát, és nézzünk egy tetszőleges ultraelemet. Az ultraelem a természetéből adódóan megmondja, hogy benne van-e ebben a halmazban vagy nincs, amit tekinthetünk úgy is, hogy 'teljesülni szeretne'-e rá az adott tulajdonság vagy nem. Például, ha az alaphalmaz az összes egész számot tartalmazza, akkor mindegyik ultraelem is ugyanúgy vagy páros lesz vagy páratlan, mint a számok, úgy értve, hogy vagy a páros számok vagy a páratlan számok halmazában lesz benne (a definíció (2) és (3) feltételei alapján).

Egy kis kitérő:

Hogyan fogjunk oroszlánt a sivatagban?

A sík pontjainak halmaza szintén végtelen, így ennek is vannak ultraelemei.

Tétel. Ha az u ultraelem benne van egy téglalap belső pontjainak a halmazában, akkor a téglalapon belül vagy a peremén lesz egyetlen konkrét P pont, akihez ő olyan közel áll, hogy minden környezetében benne van.

Bizonyítás. Legyen a P pont, amit keresünk, az oroszlán, és a téglalap a sivatag. A sivatagot elfelezzük: az egyik alapvonalával párhuzamos felezővonalára kerítést építünk. Na most az oroszlán vagy az egyik elkerített részben van vagy a másikban (vagy épp ráépítettük a kerítést). Amelyik részben van, azt szépen tovább felezzük az előző felezővonalra mindig merőlegesen, hogy a területe (avagy vonalhossza, ha épp beletrafáltunk) éppen feleződjön.
Végül az oroszlán teljesen be lesz kerítve. □

Ha netán kör vagy bármi más korlátos síkidom lenne a sivatag alakja, az belefoglalható lenne egy nagyobb téglalapba, így az előző gondolatmenet hibátlanul alkalmazható rá.

Csak úgy érdekességképp, a teljes síkot leképezhetjük egy pereme nélküli körlapba, hogy a pontok legalapvetőbb környezeti viszonyai ne változzanak: rögzítsünk egy origót (O pont), és minden belőle induló félegyenesen deformáljuk a tőle mért távolságot az $r \mapsto \frac{r}{r+1}$ függvény alapján, azaz ha egy P pont origótól vett távolsága mondjuk 7 akkor a P' pont ugyanazon az OP félegyenesen lesz de az origótól $\frac{7}{8}$ távolságra.
Ezután alkalmazva az oroszlánfogást, látható, hogy a sík minden egyes ultraeleme vagy a sík valamely konkrét pontjához kötődik a fent írtak értelmében, vagy a síkot körbevevő végtelen távoli lezáró körvonal peremének valamely konkrét pontjához.

Feladat. Bármely u ultraelemre és A, B halmazokra $u(A \cap B)$ pontosan akkor `igaz`, ha $u(A)$ és $u(B)$ mindkettő `igaz`.

3. Ultraszámok

Ebben a szakaszban a természetes számok $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$ halmazának az ultraelemeit vizsgáljuk, amiket nevezzünk csak *ultraszámok*-nak az elkövetkezendőkben.

Minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz tekintsük az '$x > n$' kijelentést. Ez minden u ultraszámra teljesül, hiszen az $A_n = \{x \in \mathbb{N} : x > n\}$ halmaz komplementere $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ *véges* sok elemet tartalmaz, amiben u nem lehet benne, így u A_n-ben van.
Ezt úgy is interpretálhatjuk, hogy mindegyik ultraszám valahol a számegyenes *után* helyezkedik, attól jobbra: minden eddig ismert számnál nagyobb.
Ez alapján akár a $+\infty$-nel is azonosíthatnánk az ultraszámokat. Mégis, eleve többen vannak, mihez kezdünk annyi sok végtelennel a számegyenes szélén? Ráadásul ennél sokkal specifikusabb tulajdonságaik is vannak, sok szempontból hús-vér számokként viselkednek.

Legszembetűnőbb, hogy minden egyes ultraszámnak *vannak számjegyei.* Méghozzá végtelen sok számjegye van, csakhogy tizedesvessző nélkül és a másik irányban (balra), és elvileg akárhány utolsó számjegye megállapítható. Viszont, szemben a természetes számokkal, semmi sem garantálja, hogy előbb-utóbb a magas helyiértékeken csupa 0 álljon.

Tegyük fel ugyanis, hogy adott egy u ultraszám. Bontsuk fel a természetes számok halmazát 1000 db halmazra a lehetséges utolsó 3 számjegyek alapján: az N_{007} halmazba a 007-re végződő számokat vesszük bele (meg a 7-est is, bár ez nem oszt, nem szoroz), az N_{496} halmazba pedig a 496-ra végződő számokat.
Mivel ezen ezer halmaz uniója kiadja a teljes alaphalmazt, $\mathbb{N}$-et, valamelyikükben benne kell hogy legyen u, és mivel ezek közös elem nélküli halmazok, pontosan az egyikükben lehet csak benne.
Ha mondjuk, az N_{279}-ben van benne, akkor úgy tekintjük, hogy u utolsó három számjegye a tízes számrendszerben 279.
Ha csak 100 részre vágtuk volna $\mathbb{N}$-et, a lehetséges utolsó két számjegyek alapján, akkor ugyanez az ultraszám mindenképpen a 79-re végződőek táborát gyarapítaná, hiszen N_{279}-nek nincs közös eleme a többivel.

Nyilván pont ugyanígy kell meghatározni az utolsó n számjegyét is akármekkora n-re: a természetes számok halmazát fel kell vágni a lehetséges utolsó n számjegyek alapján 10^n részre, és ezek közül az u ultraszám pontosan az egyikben lesz benne (ráadásul a kisebb n-ekre kapott eredményekkel koherens módon).

Sőt, továbbmenve elgondolhatjuk, hogy itt a 10-es alapszámnak tulajdonképpen semmilyen különleges szerepe nincs:

Tétel. Egy ultraszám minden számrendszerben meghatároz végtelen sok számjegyet.

Például a kettes számrendszerben (aminek a számjegyei csak a 0 és az 1), egy adott szám utolsó számjegye azt jelzi, hogy a szám páros vagy páratlan, az utolsó két számjegy együtt megmondja, hogy 4-gyel osztva milyen maradékot ad (00, 01, 10, 11 rendre a $0, 1, 2, 3$ maradékokat jelentik), az utolsó három számjegy együtt a 8-cal való osztási maradékot határozza meg, és így tovább.

Amíg csak a természetes számokat akarjuk felírni különféle számrendszerekben, semmilyen rendellenességbe nem ütközünk: ha ismerjük a szám számjegyeit az egyik számrendszerben, az egyértelműen meghatározza magát a számot, és így a számjegyeit is bármely másik számrendszerben.

Roppant érdekes azonban, hogy ha két számrendszer alapszámának nincs (az 1-en kívül) közös osztója, akkor az ultraszámok szempontjából ez a két számrendszer *teljesen független egymástól!*

Tétel. Legyenek $A_1, A_2, A_3, \ldots$ páronként közös osztó nélküli természetes számok. Akárhogyan is írunk elő végtelen sok számjegyet az $A_1, A_2, A_3, \ldots$ alapú számrendszerek mindegyikében, lesz (nem is egy) olyan ultraszám, aminek épp az előre felírtak a számjegyei az $A_1, A_2, A_3, \ldots$ alapú számrendszerek mindegyikében.

(A bizonyítás alapja a Kínai maradéktétel, és hogy mindig elég csak az utolsó n számjegyre koncentrálni.)

Példának okáért, van tehát (nem is egy) olyan ultraszám, ami tízes számrendszerben a 0 – úgy értve, hogy mindegyik számjegye 0 –, míg mondjuk hetes számrendszerben az 1 – úgy értve, hogy az utolsó számjegye hetes számrendszerben 1, az összes előtte lévő meg 0.
A maradékokra felírt egyenletrendszert megoldva eljuthatunk *hetvenes* számrendszerben az utolsó néhány számjegyéhez bármely ilyen ultraszámnak: $33, 0, 25, 35, 69, 42, 32, 55, 7, 36, 4, 16, 55, 35, 50$.
Ellenőrzésképp, ha csak az utolsó két számjegyet nézzük, $35 \cdot 70 + 50 = 2500$, aminek az utolsó két számjegye tízes számrendszerben valóban 00, hetes számrendszerben pedig 01 mert 2499 osztható 49-cel (történetesen éppen ugye $49 \cdot 51 = 50^2 - 1^2 = 2499$).
A következő számjegy mindig korrigál az eredmény következő helyiértékén. Az utolsó három számjegyre nézve:

$$55 \cdot 4900 + 35 \cdot 70 + 50 \;=\; 272\,\mathbf{000} \;=\; 793 \cdot 7^3 + \mathbf{1} \;=\; 2\,212\,\mathbf{001}_{(7)}\,.$$

Hasonlóan, az utolsó n számjegyeket tekintve ugyanígy fennáll mindkét összefüggés.

Feladat. Ha egy ultraszámnak kettes számrendszerben mindegyik számjegye 1, ötös számrendszerben minden számjegye 4, akkor tízes számrendszerben mik lesznek a számjegyei?

4. Balra végtelen számok

Mint láttuk, az egyvalamire vonatkozó tulajdonságok igen szépen értelmezhetőek ultraelemekre. Azonban a többvalamire vonatkozó tulajdonságok, összefüggések, többváltozós műveletek csak jóval körülményesebben. Például az, hogy két ultraszám közül *melyik a kisebb, melyik a nagyobb*, valahogy teljesen értelmét veszti. Ha nagyon akarjuk, lehet ugyan két ultraszám összegét vagy szorzatát értelmezni *valahogyan*, de maga a definíció se lesz szimmetrikus, és ebből kifolyólag a kapott műveletek se lesznek azok, pláne nem könnyen kezelhetőek.

Úgyhogy evezzünk át az ultraszámok mindenféle számrendszerekben hagyott különféle lehetséges lenyomatainak a vízére, a *balra végtelen számok* világába, akik önmagukban is egy igen szép elméletet alapoznak meg. A körükben legalább az összeadás és a szorzás pont olyan, amilyennek ismerjük. És, egyelőre maradjunk a tízes számrendszernél.

Ellentétben az ultraszámokkal, egy adott számrendszerbeli balra végtelen számot meghatároznak a számjegyei. Ha tehát egy balra végtelen szám mindegyik számjegye 0, akkor ő a nulla.

Ugye, ha valaki leír nekünk végtelen sok számjegyet, az egyesek, a tízesek, a százasok, az ezresek, stb. stb. helyére mind-mind kaptunk egy számjegyet, akkor ehhez – mondjuk – hozzá tudunk adni 1-et, nem?
Hát, csak meg kell növelni eggyel a legutolsó számjegyet. Illetve, ha az 9-es, akkor 0 lesz belőle, és az előző számjegyet kell növelni eggyel. Hacsak nem az is 9-es, mert akkor 0 lesz belőle, és menni kell a következő számjegyre...

Na, hát pont ugyanígy kell bármilyen természetes vagy akár egy másik balra végtelen számot is hozzáadni: az utolsó számjegytől elindulva elvégezzük az összeadásokat és jegyezzük a túlcsordulásokat. Minden egyes helyiértéken kapunk egy konkrét számjegyet.

Például, vegyük azt a balra végtelen számot, aminek mindegyik számjegye 9-es: $\cdots 9999999$. Ehhez ha egyet adunk, akkor minden helyiértéknél 0-t kapunk eredményül és átviszünk egy 1-est a túlcsordulás miatt a következő helyiértékre.
Mivel az eredmény mindegyik számjegye 0, ez hát akkor a fenti megállapodás szerint a 0 természetes számot jelöli, azaz $\cdots 9999999$ teljesíti a -1 definícióját: ha hozzáadunk egyet, nullát kapunk.

Ugyanígy bármilyen negatív egész számot fel tudunk írni balra végtelen alakban: az utolsó számjegyet tízre kell kiegészíteni, ez behoz majd egy 1-es túlcsordulást, így az összes többit 9-re, mint ha – teszem azt – 1000000000-ből vonnánk ki. Például $-496 = \cdots 999999999504$.

Nem mellékesen a számítógépes számábrázolásban a negatív számok tekintetében épp ez történik, csak ott ugye véges sok biten és kettes számrendszerben.

Ha precízek akarunk lenni, egy balra végtelen szám alatt (adott számrendszerhez tartozó) számjegyek végtelen $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ sorozatát értjük (a sorozatok hagyományos írásmódja alapján, az eddigiekhez képest fordítva van a számjegyek sorrendje), és az összeadás, kivonás, szorzás műveleteket minden n-re az $a_0 + 10\,a_1 + 100\,a_2 + 1000\,a_3 + \cdots + 10^{n-1}a_{n-1}$ számokkal végezzük, és az eredmény utolsó n számjegyét vesszük, azaz a 10^n-nel vett osztási maradékát.

Például a fent említett $\cdots 9999504$ számot a $(4, 0, 5, 9, 9, 9, 9, \dots)$ számjegysorozat reprezentálja, és ha ezt megszorozzuk a csupa 9-esből álló $(9, 9, 9, 9, \dots)$ sorozattal reprezentált "számmal", és mondjuk vesszük az utolsó 6 számjegyet (a reprezentáló sorozat első 6 elemét), akkor az alábbi szorzat utolsó 6 számjegye adja meg az eredmény utolsó 6 számjegyét:

$$\begin{aligned}(4 + 500 + 9000 + 90\,000 + 900\,000) \cdot (9 + 90 + 900 + 9000 + 90\,000 + 900\,000)\\ = 999\,504 \cdot 999\,999\\ = 999\,503\,\mathbf{000\,496}\end{aligned}$$

és ahogy várnánk, $(-1)\cdot(-496) = 496$ teljesül, akárhány utolsó számjegyet is nézünk: $\cdots 00000496$.

[Ugyanis, írhatjuk, hogy $999\,504 = 1\,000\,000 - 496$ és $999\,999 = 1\,000\,000 - 1$, amikkel

$$(999\,504) \cdot (999\,999) = (1\,000\,000 - 496) \cdot (1\,000\,000 - 1)$$

és ha felbontjuk a zárójelet, a $(-1) \cdot (-496)$ tagon kívül mindegyikben tényező lesz az egymillió, tehát az utolsó 6 számjegybe nem számít bele. Ugyanez a trükk alkalmazható 6 helyett tetszőleges n-re.]

Nem mellékesen, amikor hátulról hármasával tagoljuk a számjegyeket, voltaképpen az *ezres számrendszerben* ábrázoljuk az adott számot, amiben a számjegyek a 000, 001, 002, ..., 997, 998, 999 hármas szimbólumok.

A negatív számokon kívül *törtszámok* is (sőt, mint később látni fogjuk, teljes négyzetgyökök is) megjelennek a balra végtelen számok körében. Méghozzá igaz a következő

Tétel. Minden olyan számmal lehet osztani a balra végtelen számok körében, aminek utolsó számjegyének nincs közös osztója a számrendszer alapszámával.

Tízes számrendszerben tehát az $1, 3, 7, 9$-re végződő számokkal tudunk osztani.

Például, ugye $-1 = \cdots 999999$, így hát $-1/9 = \cdots 1111111$. (Vesd össze a bevezetőben írtakkal.)
Ha ennek vesszük az ellentettjét: az utolsó számjegyet 10-re egészítjük ki, az összes többit 9-re, akkor megkapjuk, hogy

$$1/9 \;=\; \cdots 8888889$$

másképpen, ha vesszük a nyolccszorosát a $-1/9$-nek, az $-8/9 = \cdots 888888$, és ehhez adjunk hozzá 1-et.
(Csodálatos módon minden körbeér, minden értelmet nyer, és matematikailag ugyanannyira konzisztens rendszert kapunk, mint amit bármely más típusú számoktól megszoktunk.)

Ha ellenőrizzük, $9 \cdot 9 = 8\mathbf{1}$, $89 \cdot 9 = 8\mathbf{01}$, $88889 \cdot 9 = 8\mathbf{00001}$, stb.
Ha végtelen sok 8-os számjegy van a 9-es előtt, akkor az eredményben

az a legelső árva 8-as számjegy kicsúszik a végtelenbe és teljesen eltűnik, merthogy a végén minden egyes helyiértéken 0 lesz, kivéve az utolsót, ahol 1:

$$\cdots 8888889 \cdot 9 \; = \; \cdots 0000001 \; = \; 1\,.$$

Az 1/3-hoz hasonlóképpen juthatunk el: $-1/3 = 3 \cdot (-1/9) = \cdots 333333$, ennek vesszük az ellentetjét, vagy a kétszereséhez adunk egyet:

$$1/3 \; = \; -2/3 + 1 \; = \; \cdots 6666667\,.$$

Feladat. Keressünk olyan csupa 9-esből álló (véges) számot, ami osztható 7-tel. Ez alapján adjuk meg az 1/7 tízes számrendszerbeli balra végtelen alakját.
Ha megvan, vessük össze a hagyományos jobbra végtelen, tizedes tört alakjával.

5. Létezik-e $\sqrt{-1}$?

Igazából, pontosan annyira létezik, mint bármely más matematikai objektum.

De, mondjuk, ultraszámként nem létezik, mint ahogy valós számként sem.
Merthogy ugyan – mint látni fogjuk – bizonyos számrendszerekben van olyan balra végtelen x szám, akire $x^2 + 1 = 0$, de például tízes számrendszerben *nincs* ilyen, mert négyzetszám nem végződhet 99-re, ugyanis a 99-re végződő számok 4-gyel osztva 3-at adnak maradékul, ellenben minden páratlan szám négyzete 4-gyel (sőt 8-cal) osztva 1-et ad maradékul. Ugyanezen (illetve teljesen hasonló) oknál fogva kettes, hármas vagy négyes számrendszerben sincs ilyen.

Ötös számrendszerben azonban van!
Íme, számoljuk ki néhány számjegyét.

Az ötös számrendszer a $0, 1, 2, 3, 4$ számjegyekkel dolgozik, és itt a -1 az a $\cdots 4444444_{(5)}$ balra végtelen szám (mert ha ehhez hozzáadunk egyet, az eredmény mindegyik számjegye 0 lesz).

Egy olyan, szintén ötös számrendszerbeli balra végtelen x számot keresünk, akit ha önmagával megszorzunk, az eredmény mindegyik számjegye 4-es, azaz $x^2 = \cdots 4444444_{(5)}$.

Állítás. Minden legalább 3 alapú számrendszerben $11^2 = 121$ és minden legalább 5 alapú számrendszerben $12^2 = 144$

Bizonyítás. Legyen a számrendszer alapszáma A.
Akkor a 11 az $A + 1$ számot jelöli és a 12 az $A + 2$ számot. Csak fel kell bontani a zárójeleket:

$$(A + 1)(A + 1) = A^2 + 2A + 1 \qquad (A + 2)(A + 2) = A^2 + 4A + 4\,.$$

Az A alapú számrendszerben A az mindig pont a $10_{(A)}$ és A^2 az mindig pont a $100_{(A)}$, tehát ez $121_{(A)}$ illetve $144_{(A)}$, már amennyiben van 2-es illetve 4-es számjegy, azaz $A \geq 3$ illetve $A \geq 5$. $\square$

Speciálisan, ötös számrendszerben itt $12_{(5)} = 7$ és $7^2 = 49 = 50 - 1 = 2 \cdot 25 - 1 = 200_{(5)} - 1 = 144_{(5)}$ valóban.

Ez jó kiindulási alap, mert máris két darab négyesre végződik, az utolsó két számjegyünk meg is van!
A következő számjegy a 2 lesz: $212_{(5)} = 57$, $(212_{(5)})^2 = 3249 = 100444_{(5)} = 10\mathbf{1}000_{(5)} - 1$.
A következő számjegy az 1 lesz. $(1212_{(5)})^2 = 182^2 = 2024444_{(5)} = 20\mathbf{3}0000_{(5)} - 1$.
A következő számjegy a 3 lesz. $(31212_{(5)})^2 = 2057^2 = 2040344444_{(5)} = 2040\mathbf{4}00000_{(5)} - 1$.
A következő számjegy a 4 lesz.
És így tovább..

Tétel. Ha adott egy kettesre végződő véges szám ötös számrendszerben, számjegyei balról jobbra $X_n, X_{n-1}, \cdots, X_2, X_1$, ahol $X_1 = 2$, aminek a négyzete n darab 4-esre végződik, akkor ha ehhez a négyzethez hozzáadunk egyet, az n darab 0-ra fog végződni, és amilyen számjegy ezek előtt áll (jobbról az $n+1$-edik helyen), az lesz a megoldás következő számjegye, X_{n+1}.

Bizonyítás. A feltétel szerint ötös számrendszerben írva:

$$\left(\overline{X_n X_{n-1} \cdots X_2 X_1}\right)^2 + 1 \;=\; \overline{\cdots A00 \cdots 00}$$

(A felülvonás itt azt jelöli, hogy nem szorzás műveletről van szó, hanem számjegyeket írunk.)
Legyen $u := \overline{X_n X_{n-1} \cdots X_2 X_1}_{(5)}$, és kizárólag az utolsó $n+1$ számjegyre koncentrálunk, azaz az 5^{n+1}-nel való osztási maradékra.
Valóban, $u^2 + 1$ ötös számrendszerbeli felírása éppen azt jelenti, hogy 5^{n+1}-nel osztva u konkrétan $A \cdot 5^n$ maradékot ad .

Az állítás szerint, ha a meglévő u számom elé írom ezt az újonnan megtalált A számjegyet, azaz a $w := A \cdot 5^n + u$ számot tekintjük, ennek a négyzete már $n+1$ darab 4-es számjegyre fog végződni.

Hát, ellenőrizzük: $w^2 = (A \cdot 5^n + u)^2$, így

$$w^2 = A^2 \cdot 5^{2n} + 2A \cdot u \cdot 5^n + u^2$$

Az utolsó n számjegyet a w^2 utolsó n számjegye, u^2 már meghatározta, és azok mind 4-esek. A következő helyiértéket a $2AX_1$ kétszeres szorzat és az u^2-ből átfolyó $A-1$ számjegy adja, modulo 5: (most használjuk, hogy $X_1 = 2$)

$$(A-1) \,+\, 2AX_1 \;=\; A - 1 + 4A \;=\; 5A - 1$$

ami egy öttel osztható számnál eggyel kevesebb, azaz ötös számrendszerben ennek 4-es az utolsó számjegye, tehát w hátulról $n+1$. számjegye is négyes. $\square$

Tovább alkalmazva ezt az algoritmust, megkapjuk, hogy

$$\boxed{\sqrt{-1} \;=\; \cdots 340423140223032431212_{(5)}}$$

Amiről eddig hallgattunk, hogy ennek az ellentettje is jó: ha ugyanis $x^2 = -1$, akkor $(-x)^2 = -1$ is teljesül. Az ötös számrendszerben az ellentetthez az utolsó számjegyet 5-re, a többit 4-re kell kiegészíteni: $\boxed{\cdots 104021304221412013233_{(5)}}$, és több megoldás nincs.

Nem sokkal bonyolultabb eljárás adható tetszőleges olyan $p > 2$ prímszám alapú számrendszerre, aminél ez a folyamat egyáltalán elkezdhető, azaz hogy a legnagyobb számjegy, $p-1$ előfordulhat négyzetszám utolsó számjegyeként.
Klasszikus számelméleti tétel, hogy ezek pedig pontosan azok a prímek,

akik 4-gyel osztva 1-et adnak maradékul.
Nincs tehát megoldása az $x^2 + 1 = 0$ egyenletnek a 7-es számrendszerbeli balra végtelen számok körében, de viszont van megoldása még a 13-as vagy a 17-es számrendszerben:

$$\cdots\mathtt{2769243C57077B200526A69555A67B41505474036C688101550155}_{(13)}{}^2 =$$
$$\cdots\mathtt{CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC}_{(13)} = -1$$

$$\cdots\mathtt{B2F04512CG5FA4631GCEG9FGC569D51EG75E81F0160E3D8CGC5A24}_{(17)}{}^2 =$$
$$\cdots\mathtt{GGGGGGGGGGGGGGGGGGGGGGGGGGGGGGGG}_{(17)} = -1$$

Feladat. Ha a számrendszerünk alapszáma, A egy összetett szám, akkor pontosan milyen feltételek adhatók A-ra, hogy az $x^2+1=0$ egyenletnek legyen megoldása a balra végtelen számok körében?